Symmetrie und Grenzwerte

Symmetrie

Ein Graph einer Funktion f kann **achsensymmetrisch** oder **punktsymmetrisch** sein.

Achsensymmetrie:

Damit ein Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, muss gelten:

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Ist ein Graph achsensymmetrisch zu einer Geraden x_0, gilt:

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0 - h)}$$

Punktsymmetrie:

Ist ein Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, so gilt:

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Folgende Gleichung gilt für die Punktsymmetrie des Graphen zu einem Punkt $P(x_0 \mid y_0)$:

$$\boxed{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2y_0}$$

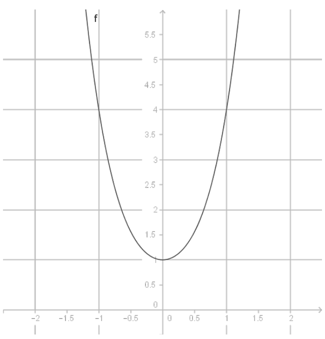
Ob ein Graph achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch ist, erkennst du auch an den Exponenten. Sind alle Exponenten gerade Zahlen so ist der Graph der Funktion achsensymmetrisch, sind die Exponenten alle ungerade ist der Graph punktsymmetrisch.

Beispiel

Prüfe ob der Graph der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1 \\ f(-x) &= x^4 + 2x^2 + 1 \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Zur besseren Veranschaulichung kannst du dir den Graphen zeichnen lassen.



Grenzwerte

Den Grenzwert einer Funktion f berechnest du mit dem **Limes**. Eine Funktion kann einen Grenzwert haben, wenn x gegen einen bestimmten Wert x_0 oder gegen $\pm\infty$ strebt.

Um den Limes zu berechnen, setzt du gedanklich den Wert x_0 in den Funktionsterm von f ein.

Hat eine Funktion einen Grenzwert, so hat diese eine waagrechte Asymptote.

Beispiel

Berechne den Grenzwert der Funktion f mit $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$ für $x\to\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \frac{2x^2+3}{x^2+1}\\ &= 2\end{aligned}$$

Für $x\to\infty$ strebt die Funktion f gegen den Wert 2. Die Funktion f hat somit eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y=2$.

Polstellen

Unter einer Polstelle versteht man eine **Definitionslücke** einer Funktion f. Die Funktion hat an dieser Stelle eine senkrechte Asymptote.

Eine Funktion hat eine Polstelle, wenn die Funktion für einen Wert von x einen ungültigen Wert annimmt.

Beispiel

Bestimme die Polstelle der Funktion f mit $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}$.

Der Nenner der Funktion darf nicht gleich Null werden. Setze daher den Nenner gleich Null und löse nach x auf um die Polstelle zu berechnen.

$$\begin{aligned}x^2-1 &= 0 \quad \mid +1\\ x^2 &= 1 \quad \mid \sqrt{}\\ x_{1,2} &= \pm 1\end{aligned}$$

Die Funktion f hat an den Stellen $x_1=-1$ und $x_2=1$ Polstellen.

Symmetrie

Ein Graph einer Funktion f kann **achsensymmetrisch** oder **punktsymmetrisch** sein.

Achsensymmetrie:

Damit ein Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, muss gelten:

$$\boxed{f(-x)=f(x)}$$

Ist ein Graph achsensymmetrisch zu einer Geraden x_0, gilt:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0-h)}$$

Punktsymmetrie:

Ist ein Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, so gilt:

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Folgende Gleichung gilt für die Punktsymmetrie des Graphen zu einem Punkt $P(x_0 \mid y_0)$:

$$\boxed{f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2y_0}$$

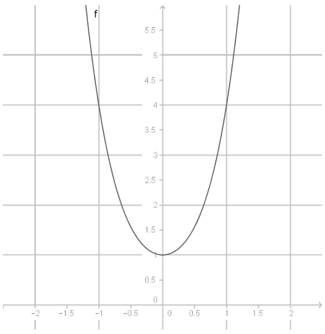
Ob ein Graph achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch ist, erkennst du auch an den Exponenten. Sind alle Exponenten gerade Zahlen so ist der Graph der Funktion achsensymmetrisch, sind die Exponenten alle ungerade ist der Graph punktsymmetrisch.

Beispiel

Prüfe ob der Graph der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

$$\begin{array}{rcl} f(-x) &=& (-x)^4 + 2\cdot(-x)^2 + 1 \\ f(-x) &=& x^4 + 2x^2 + 1 \\ f(-x) &=& f(x) \end{array}$$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Zur besseren Veranschaulichung kannst du dir den Graphen zeichnen lassen.



Grenzwerte

Den Grenzwert einer Funktion f berechnest du mit dem **Limes**. Eine Funktion kann einen Grenzwert haben, wenn x gegen einen bestimmten Wert x_0 oder gegen $\pm\infty$ strebt.

Um den Limes zu berechnen, setzt du gedanklich den Wert x_0 in den Funktionsterm von f ein.

Hat eine Funktion einen Grenzwert, so hat diese eine waagrechte Asymptote.

Beispiel

Berechne den Grenzwert der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$ für $x \to \infty$.

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) &=& \dfrac{2x^2+3}{x^2+1} \\ &=& 2 \end{array}$$

Für $x \to \infty$ strebt die Funktion f gegen den Wert 2. Die Funktion f hat somit eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.

Polstellen

Unter einer Polstelle versteht man eine **Definitionslücke** einer Funktion f. Die Funktion hat an dieser Stelle eine senkrechte Asymptote.

Eine Funktion hat eine Polstelle, wenn die Funktion für einen Wert von x einen ungültigen Wert annimmt.

Beispiel

Bestimme die Polstelle der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Der Nenner der Funktion darf nicht gleich Null werden. Setze daher den Nenner gleich Null und löse nach x auf um die Polstelle zu berechnen.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \quad \mid +1 \\ x^2 &= 1 \quad \mid \sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Die Funktion f hat an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ Polstellen.